

# Zusammenfassung

- Was ist im bisherigen Verlauf der VL (vor der Info-Theorie) zentral?

Zentral sind nur wenige Konzepte

- Funktionsdefinitionen formulieren
- Fallunterscheidung unter Verwendung von Pattern-matching
- Rekursion (Lineare, nichtlineare, Einbettung)
- Definition selbstdefinierter Typen
- Rekursion und Pattern-matching auf selbstdefinierten Typen

## Beispiel zu Variante 2:

Gegeben:  $even(n) = \exists z \in \mathbb{N}_0 : z \cdot 2 = n$

8

$$f(n) = \begin{cases} \text{True} & n=0 \\ \text{False} & n=1 \\ f(n-2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beh:  $[f(n) = even(n)] =: A(n)$

Induktionsanfang:

$$n=0 : f(0) = \text{True}$$

$$even(0) = (\exists z \in \mathbb{N} : z \cdot 2 = 0)$$

$$\text{für } z=0 \Rightarrow even(0) = \text{True} \quad \checkmark$$

$$n=1 : f(1) = \text{False}$$

$$even(1) = \exists z \in \mathbb{N}_0 : z \cdot 2 = 1$$

$$\text{es gilt } even(1) = \text{False}$$

$$\Rightarrow [even(1) = f(1)] = \text{True}$$

Induktionsschluß:

Induktionsannahme:  $A(n)$  und  $A(n+1)$  gilt.

Betrachte  $A(n+2)$ :  $f(n+2) \stackrel{?}{=} even(n+2)$

$$f(n+2) \stackrel{?}{=} f(n) = even(n)$$

Def.

J.A.

$$= \exists z \in \mathbb{N}_0 : z \cdot 2 = n$$

$$= \exists z \in \mathbb{N}_0 : z \cdot 2 + 2 = n + 2$$

$$= \exists z \in \mathbb{N}_0 : (z+1) \cdot 2 = n+2$$

$$= \exists z' \in \mathbb{N}_0 : z' \cdot 2 = n+2$$

$$= even(n+2) \quad \square$$

# 5. Vollständige <sup>Induktion</sup> als "Werkzeug"

9

## 5.1 Vollständige Induktion über $\mathbb{N}$

Es gibt im wesentlichen 3 Varianten

Allgemein: Es werden Aussagen  $A(n)$

betrachtet und es soll gezeigt

werden:

$$\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$$

Beispiele:

$$\left[ \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \right] =: A(n)$$

Variante 1: Wenn

- $A(n_0)$  gilt (Induktionsanfang)

- aus  $A(n)$  (für  $n > n_0$ ) die Gültigkeit von  $A(n+1)$  folgt (Indukt.-schritt)

dann gilt  $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$

(Beispiel: siehe Übung)

Variante 2: Wenn

- $A(n_0)$  und  $A(n_0+1)$  gilt,

- aus  $A(n)$  und  $A(n+1)$  die Gültigkeit von  $A(n+2)$  folgt,

dann gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$

### Variante 3: Wenn

10

- $A(n_0)$  gilt
- und aus der Gültigkeit von  $A(n_0), A(n_0+1), \dots, A(n)$  die Gültigkeit von  $A(n+1)$  folgt, dann gilt  $A(n) \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ .

### Beispiel zu Variante 3

(Division mit Rest)

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es  $q, r \in \mathbb{N}_0$ , so dass

$$n = q \cdot m + r; \quad 0 \leq r < m$$

[Aussage:

$$A(n) = \forall m \in \mathbb{N} : \exists q, r \in \mathbb{N}_0 : n = q \cdot m + r \wedge 0 \leq r < m]$$

Beweis: