Technische Universität München
Fakultät für Informatik
C. Buckl, D. Gmach, K. Schlüter,
Dr. M. Schneider

WS 2005/2006
Lösungsvorschläge zu Blatt 2
4. November 2005

Übungen zu Einführung in die Informatik I

Aufgabe 4 Lineare Rekursionen (Lösungsvorschlag)

a) Fakultätsfunktion

```
# let rec fak n =
        match n with
        | 0 -> 1
        | n -> n * fak(n - 1);;
```

b) Zahlensumme

```
# let rec sum n =
        match n with
        | 0 -> 0
        | n -> n + sum(n - 1);;
```

c) Fakultätsfunktion mit 0,1 sowie 20 und 21 testen. Zahlensumme mit großen Zahlen testen.

Aufgabe 5 Fibonacci Zahlen (Lösungsvorschlag)

a)
```
# let rec fib x =
match x with
| 0 -> 0
| 1 -> 1
| x -> fib(x - 1) + fib (x - 2);;
val fib : int -> int = <fun>
```

b) Laufzeitprobleme bei großen Eingaben. Zum Beispiel Test mit 25, 30, 35, 40. Geschicktes Testen verlangt auch den Test nach 0 und 1.

Aufgabe 6 Türme von Hanoi (Lösungsvorschlag)

a) Position

```
# let string_of_turm turm =
match turm with
| 1 -> "eins"
| 2 -> "zwei"
| 3 -> "drei";;
```

Die Fehlermeldung ”Warning: this pattern-matching is not exhaustive.” bedenken und mögliche Alternative mit | _ -> ”Fehler” anregen.

b) Zug

```
# let string_of_zug (start, ziel) =
"von " ^ string_of_turm start ^
" nach " ^ string_of_turm ziel ^ " ";;
```

c) Hanoi

```
# let rec hanoi anzahl start ziel =
if anzahl <> 0
then let hilfe = 6 - start - ziel in
      let start_nach_hilfe = hanoi (anzahl - 1) start hilfe in
      let hilfe_nach_ziel = hanoi (anzahl - 1) hilfe ziel in
      start_nach_hilfe ^ string_of_zug (start, ziel)  ^ hilfe_nach_ziel
else "";;
```

Aufgabe 7 Babylonisches Wurzelziehen (Lösungsvorschlag)

Das Babylonische Wurzelziehen lässt sich mathematisch vom Newton-Verfahren herleiten. Das Newton-Verfahren berechnet für eine Funktion f eine Nullstelle mittels folgender Formel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Zur Bestimmung der Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - a$ lautet die Formal folgendermaßen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

Weiter gilt:

$$\left(x + \frac{a}{x}\right)\frac{1}{2} = \frac{x^2 + a}{2x} = \frac{2x^2 - \left(x^2 - a\right)}{2x} = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

Die Ermittlung der Quadratwurzel kann geometrisch als die Bestimmung der Seitenlänge eines Quadrates mit Flächeninhalt a gedeutet werden. Hierbei startet man mit einem Rechteck der Seitenlänge $x_0 = 1$ und $y_0 = a/1 = a$. In jedem Iterationsschritt wird das arithmetische Mittel der beiden Seitenlängen als neue Seitenlänge x_{n+1} verwendet. y_{n+1} ergibt sich dann aus a/x_{n+1}. Dadurch erreicht man in jeden Iterationsschritt durch die Bildung des arithmetischen Mittels eine bessere Näherung des Rechtecks an ein Quadrat mit dem Flächeninhalt a.

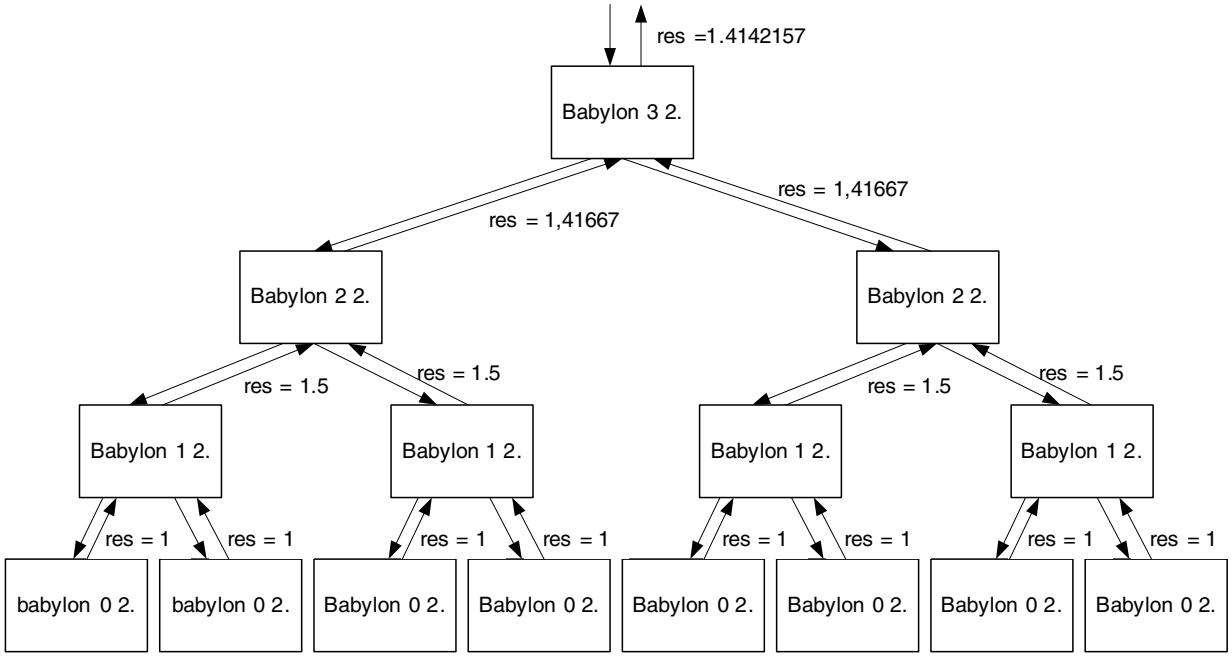
a)
```
# let rec babylon k a =
        if k<1
        then 1.
        else ((babylon (k-1) a) +. a /. (babylon (k-1) a)) /. 2.;;
val babylon : int -> float -> float = <fun>
```

b)
```
# babylon 0 2.;;
- : float = 1.
# babylon 1 2.;;
```

```
- : float = 1.5
# babylon 2 2.;;
- : float = 1.4166666666666665
# babylon 3 2.;;
- : float = 1.4142156862745097
# babylon 4 2.;;
- : float = 1.4142135623746899
# babylon 5 2.;;
- : float = 1.4142135623730949
# babylon 6 2.;;
- : float = 1.4142135623730949
```

Das Verfahren konvergiert sehr schnell und liefert bereits nach wenigen Schritten ein gute Näherung.

c) Die obige Implementierung weist eine exponentielle Komplexität auf. Für die Berechnung sind $2^{k+1} - 1$ Aufrufe erforderlich. Der Aufrufbaum sieht damit folgendermaßen aus:



d)
```
# let rec intervall k a (l, r) =
          if k<1
          then (l, r)
          else let m = (l +. r) /. 2. in
                  if m *. m > a
                  then intervall (k-1) a (l, m)
                  else intervall (k-1) a (m, r);;
val intervall : int -> float -> float * float -> float * float = <fun>
# intervall 0 2. (0., 2.);;
- : float * float = (0., 2.)
# intervall 1 2. (0., 2.);;
- : float * float = (1., 2.)
# intervall 2 2. (0., 2.);;
- : float * float = (1., 1.5)
# intervall 3 2. (0., 2.);;
```

```
- : float * float = (1.25, 1.5)
# intervall 4 2. (0., 2.);;
- : float * float = (1.375, 1.5)
# intervall 5 2. (0., 2.);;
- : float * float = (1.375, 1.4375)
# intervall 6 2. (0., 2.);;
- : float * float = (1.40625, 1.4375)
```

e)
```
# let rec intervall_f f a (l, r) =
          if r -. l < f
          then (l, r)
          else let m = (l +. r) /. 2. in
          if m *. m > a
                  then intervall_f f a (l, m)
                  else intervall_f f a (m, r);;
val intervall_f : float -> float -> float * float -> float * float = <fun>
# intervall_f 0.0001 2. (0., 2.);;
- : float * float = (1.4141845703125, 1.41424560546875)
```

Aufgabe 8 Anzahl der Aufrufe von Fakultäts- und Fibonaccifunktion (Lösungsvorschlag)

a) Die Funktion, die die Aufrufe der Fakultätsfunktion zählt, lautet:

```
let rec anzahlFakultaet n = match n with
| 0 -> 1
| n -> 1 + anzahlFakultaet (n-1);;
```

b) Die Funktion, die die Aufrufe der Fibonaccifunktion zählt, lautet:

```
let rec anzahlFibonacci n = match n with
| 0 | 1 -> 1
| n -> 1 + anzahlFibonacci (n-1) + anzahlFibonacci (n-2)
;;
```

c) Bereits nach wenigen Tests zeigt sich, dass die Anzahl der Aufrufe der Fakultätsfunktion proportional zum Funktionsparameter *n* ist. Die Anzahl der Aufrufe der Fibonaccifunktion hängt dagegen nichtlinear mit dem Funktionsparameter n zusammen. Man kann zeigen (später) dass die Anzahl der Aufrufe exponentiell wächst

Aufgabe 9 Frühester Ostertermin (Lösungsvorschlag)

Eine Implementierung könnte folgendermaßen beschaffen sein:

```
type monat = Januar | Februar | März | April | Mai
           | Juni | Juli | August | September
           | Oktober | November | Dezember;;

type datum = Datum of (int * monat * int);;

let tabelle_m j = match j with
```

```
    | j when (j > 1582 && j < 1700) -> 22
    | j when (j > 1699 && j < 1900) -> 23
    | j when (j > 1899 && j < 2200) -> 24
    | j when (j > 2199 && j < 2300) -> 25
    | _ -> failwith "Falsche Eingabe";;

let tabelle_n j = match j with
    | j when (j > 1582 && j < 1700) -> 2
    | j when (j > 1699 && j < 1800) -> 3
    | j when (j > 1799 && j < 1900) -> 4
    | j when (j > 1899 && j < 2100) -> 5
    | j when (j > 2099 && j < 2200) -> 6
    | j when (j > 2199 && j < 2300) -> 0
    | _ -> failwith "Falsche Eingabe";;

let d j = (19 *(j mod 19) + tabelle_m j) mod 30;;

let e j = (2 * (j mod 4) + 4 * ( j mod 7) + 6 * (d j) + tabelle_n j) mod 7;;

let ostersonntagOhneZusatzregel j = let d_plus_e = d j + e j
      in if ((22 + d_plus_e)<32) then Datum(22 + d_plus_e, März, j)
      else Datum (d_plus_e - 9, April, j);;

let ostersonntag j =
    let tag = ostersonntagOhneZusatzregel j in
    match tag with
      | Datum (26, April, j) -> Datum (19, April, j)
      | Datum (25, April, j) when ((d j = 28) && (e j = 6) && (j mod 19 > 10))
          -> Datum (18, April, j)
      | _ -> tag;;

let rec fruehesterOsterterminEmbedded (fruehesterTermin, jahr) =
    let selectTag datum = match datum with
        Datum (tag, monat, jahr) -> tag
    and selectMonat datum = match datum with
        Datum (tag, monat, jahr) -> monat
    and ostern = ostersonntag jahr in
    match jahr with
      | 2299 -> (fruehesterTermin, jahr)
      | jahr when ((selectMonat ostern) < (selectMonat fruehesterTermin)) ->
            fruehesterOsterterminEmbedded (ostern, jahr+1)
      | jahr when ((selectMonat ostern) > (selectMonat fruehesterTermin)) ->
            fruehesterOsterterminEmbedded (fruehesterTermin, jahr+1)
      | jahr when ((selectTag ostern) < (selectTag fruehesterTermin)) ->
            fruehesterOsterterminEmbedded (ostern, jahr+1)
      | jahr -> fruehesterOsterterminEmbedded (fruehesterTermin, jahr+1)
;;

let fruehesterOstertermin = fruehesterOsterterminEmbedded (ostersonntag 1583, 1583);;
```